d. On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$(1) \qquad (f'(x) - f'(y) \mid x - y) \geqslant c \| x - y \|^2 \qquad \forall x, y \in E.$$

Montrer sous cette condition que $\lim_{\| x \| \to \infty} f(x) = + \infty$.

e. q est une forme quadratique sur E; a et c deux éléments fixés de E; on pose $q_a(x) = q(x - a)$. A quelle condition la fonction $x \longmapsto q_a(x) + (c \mid x)$ est-elle convexe ? A quelle condition satisfait-elle à la condition (1) ?

2° *a.* Soit φ une fonction différentiable sur E. On suppose que le vecteur x_0 de E a la propriété :

$$(2) \qquad \varphi(x_0) \leqslant \varphi(x) \qquad \forall x \in E.$$

Montrer que $\varphi'(x_0) = 0$. Établir la réciproque lorsque φ est convexe.

b. Soient f une fonction convexe différentiable sur E, C une partie convexe de E. Montrer l'équivalence des conditions suivantes pour le vecteur x_0 de C :

$$(3) \qquad f(x_0) \leqslant f(y) \qquad \forall y \in C;$$

$$(4) \qquad (f'(x_0) \mid y - x_0) \geqslant 0 \qquad \forall y \in C.$$

(On pourra considérer, pour chaque y de C, la fonction

$$\theta \longmapsto f(x_0 + \theta(y - x_0)), \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 1).$$

c. Vérifier que, sous l'hypothèse (1), chacun des problèmes (2) et (3) admet au plus une solution.

d. q et r sont deux formes quadratiques positives sur E; q est non dégénérée; a, b, c sont trois éléments de E. Les notations étant celles de 1°, *e.* trouver $x_0 \in E$ tel que la fonction :

$$x \longmapsto q_a(x) + r_b(x) + (c \mid x)$$

soit minimum sur E au point x_0.

3° Soit C une partie convexe fermée non vide de E.

a. Soit f une fonction convexe continue sur E. Si C n'est pas bornée, on suppose que $\lim_{\substack{\| x \| \to \infty \\ \text{et } x \in C}} f(x) = + \infty$. Vérifier que f est bornée inférieurement sur C, puis montrer qu'il existe au moins un vecteur $x_0 \in C$ ayant la propriété (3). [On admettra que, de toute suite bornée d'éléments de E, on peut extraire une sous-suite convergente.]

10 ECOLES NORMALES SUPERIEURES ULM & SEVRES 1975

Groupe B

MATHÉMATIQUES

E est un espace euclidien réel de dimension finie N; on note $(x \mid y)$ le produit scalaire de deux vecteurs x, y, $\| x \| = (x \mid x)^{1/2}$ la norme de x. Une fonction numérique f définie sur E est dite « convexe » si

$$f(\theta x + (1 - \theta) y) \leqslant \theta f(x) + (1 - \theta) f(y) \qquad \forall x, y \in E, \quad \theta \in [0, 1];$$

une partie A de E est dite convexe si $\theta x + (1 - \theta) y \in A$ chaque fois que $x, y \in A$ et $\theta \in [0, 1]$. Lorsqu'une fonction numérique f, définie sur E, est différentiable, sa différentielle au point x, forme linéaire sur E, est notée $f'(x)$; la valeur de cette différentielle sur un vecteur h de E est désignée par $(f'(x) \mid h)$; on demande de justifier brièvement cette notation.

I

1° *a.* Soit f une fonction numérique définie sur E; deux éléments x et y de E étant donnés, on définit sur **R** la fonction :

$$t \longmapsto F(t) = f(x + t(y - x)).$$

Montrer que si f est convexe, F a la même propriété; formuler et établir la réciproque.

b. G est une fonction numérique dérivable définie sur **R**. Démontrer l'équivalence entre la convexité de G et la croissance de sa dérivée G'.

c. Soit f une fonction numérique différentiable définie sur E. Déduire du *b.* l'équivalence entre les deux conditions :

(i) f est convexe;

$$(ii) \qquad (f'(x) - f'(y) \mid x - y) \geqslant 0 \qquad \forall x, y \in E.$$

b. En déduire que, pour chaque $z \in E$, il existe $x \in C$, unique, tel que $(z - x \mid y - x) \leqslant 0 \quad \forall y \in C$.

II

Dans toute la suite du problème, les lettres minuscules *italiques* désignent des vecteurs de E, les minuscules grecques des nombres réels.

On dit qu'une partie C de E est un cône de sommet O

si $\alpha y \in C \quad \forall \alpha \geqslant 0 \quad$ et $\quad y \in C$.

Vérifier qu'un cône de sommet O est convexe

si et seulement si $x_1 + x_2 \in C \quad \forall x_1, x_2 \in C$.

On dit qu'un cône de sommet O est engendré par m vecteurs non nuls $y_1, \ldots, y_m$ si C est l'ensemble des vecteurs $\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_m y_m$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \geqslant 0$.

On dit qu'un cône de sommet O est polyédral s'il existe p vecteurs non nuls $u_1, \ldots, u_p$ tels que :

$$C = \{ x \in E \,/\, (u_1 \mid x) \geqslant 0, \ldots, (u_p \mid x) \geqslant 0 \}.$$

1° *a.* Montrer que tout cône polyédral est convexe, ainsi que tout cône engendré par m vecteurs non nuls.

b. Montrer que tout cône polyédral est fermé.

c. Soit C le cône engendré par les m vecteurs $y_1, \ldots, y_m$. Montrer que, pour chaque $x \in C$, $x = \sum_1^m \alpha_i y_i$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \geqslant 0$, il existe une partie libre $\{ z_1, \ldots, z_k \}$ extraite de $\{ y_1, \ldots, y_m \}$ telle que $x = \sum_1^k \beta_i z_i$, avec $\beta_1, \ldots, \beta_k \geqslant 0$. [Si $\sum_1^m \gamma_i y_i = 0$ est une relation linéaire à coefficients non tous nuls, on laisse de côté un vecteur y_j dont l'indice j est choisi de manière que $\gamma_j \neq 0$ et

$$\alpha_i - \frac{\alpha_j}{\gamma_j} \gamma_i \geqslant 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m].$$

d. Vérifier qu'un cône engendré par des vecteurs linéairement indépendants est fermé; déduire du *c.* que la propriété est encore vraie pour un cône engendré par un nombre fini de vecteurs.

2° Un cône polyédral défini par p inéquations $(u_k \mid x) \geqslant 0$, peut être réduit à son sommet O; on veut montrer que, ce cas mis à part, il peut toujours être engendré par m vecteurs non nuls.

a. Établir la propriété, d'une part pour $N = 1$, d'autre part pour $p = 1$.

b. On suppose la propriété démontrée pour tout cône polyédral défini par au plus p inéquations; en déduire la propriété pour le cône C défini par les $(p + 1)$ inéquations :

$$(u_1 \mid x) \geqslant 0, \ldots, (u_p \mid x) \geqslant 0, (u \mid x) \geqslant 0.$$

[On pourra remarquer que l'intersection de C avec le sous-espace $(u \mid x) = 0$, si elle n'est pas ce sous-espace lui-même, est dans ce sous-espace un cône polyédral défini par au plus p inéquations].

3° Soit C un cône de sommet O engendré par m vecteurs non nuls y_i ; on suppose $C \neq E$. Déduire du I-3° *b.* et du II-2° :

a. Qu'il existe des vecteurs u non nuls tels que :

$$(u \mid y_i) \geqslant 0 \quad \forall i = 1, \ldots, m ;$$

b. Que C est un cône polyédral.

III

A chaque cône A de sommet O, on associe le cône

$$A^+ = \{ u \in E \,/\, (u \mid x) \geqslant 0 \quad \forall x \in A \},$$

puis le cône A^{++} défini de la même manière à partir de A^+.

1° *a.* Vérifier que A^+ est un cône convexe fermé de sommet O; déduire du I-3° *b.* que $A^{++} = A$ si et seulement si A est convexe fermé.

Montrer que, si A est un cône polyédral non réduit à O, il en est de même de A^+.

b. Établir les relations suivantes, où A et B sont des cônes de sommet O : $A \subset B$ entraîne $A^+ \supset B^+$; A^{++} est le plus petit cône convexe fermé contenant A ; $(A + B)^+ = A^+ \cap B^+$; $A^+ + B^+ \subset (A \cap B)^+$; donner un exemple où cette dernière inclusion est stricte.

Montrer que, si A et B sont polyédraux, on a $A^+ + B^+ = (A \cap B)^+$.

c. A tout endomorphisme Φ sur E, on associe l'endomorphisme Φ', dit transposé de Φ, tel que $(\Phi x \mid y) = (x \mid \Phi' y) \quad \forall x, y \in E$:

comparer les matrices de Φ et Φ' dans une base orthonormée de E: comparer Φ'^{-1} et $(\Phi^{-1})'$ lorsque Φ est inversible, ce qu'on supposera désormais.

Établir les relations $\Phi'(A^+) = (\Phi^{-1} A)^+$, $\Phi'^{-1}(A^+) = (\Phi A)^+$ pour tout cône A de sommet O.

2° Dans toute la suite, Φ est un endomorphisme inversible donné, K un cône polyédral donné dans E tel que $K = K^+$; comment peut-on obtenir de tels cônes ?

a. Montrer que la relation $y - x \in K$, reliant les deux vecteurs x et y, est une relation d'ordre sur E; on notera alors $y \geqslant x$; vérifier que $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ entraînent $x + y \geqslant 0$ et $(x \mid y) \geqslant 0$; que $\alpha \geqslant 0, x \geqslant 0$ entraînent $\alpha x \geqslant 0$.

b. Soit b donné dans E; montrer que $\{ x \in E \mid x \geqslant 0, \Phi x = b \}$ n'est pas vide à la condition, nécessaire et suffisante, que

$$(q \mid b) \geqslant 0 \quad \forall q \in E, \quad \Phi' q \geqslant 0.$$

c. Vérifier que $K + \Phi(-K) = (K \cap \Phi'^{-1}(-K))^+$, puis en déduire que $\{ x \in E \mid x \geqslant 0, \quad \Phi x \geqslant b \}$ n'est pas vide à la condition, nécessaire et suffisante, que $(q \mid b) \leqslant 0 \quad \forall q \geqslant 0, \quad \Phi' q \leqslant 0$.

d. On munit $E \times \mathbf{R}$ du produit scalaire

$$((x, \xi) \mid (y, \eta)) = (x \mid y) + \xi \eta ;$$

les éléments positifs de $E \times \mathbf{R}$ sont par définition les éléments de $K \times \mathbf{R}_+$. Soit a donné dans E. On définit sur $E \times \mathbf{R}$ l'endomorphisme $\tilde{\Phi}$ par

$$\tilde{\Phi}(x, \xi) = (\Phi x, (x \mid a) - \xi).$$

Vérifier que $\tilde{\Phi}$ est inversible; caractériser son transposé. A l'aide de l'endomorphisme $\tilde{\Phi}$, utiliser *c.* pour montrer que, α étant donné,

$$\{ x \in E \mid x \geqslant 0, \quad \Phi x \geqslant b, \quad (x \mid a) \geqslant \alpha \}$$

n'est pas vide équivaut aux deux conditions réunies :

(i) $\quad (q \mid b) \leqslant 0 \quad \forall q \geqslant 0, \Phi' q \leqslant 0 ;$

(ii) $\quad (q \mid b) + \alpha \leqslant 0 \quad \forall q \geqslant 0, \Phi' q + a \leqslant 0.$

3° Soit a et b fixés dans E. On pose :

$$C = \{ y \in E \mid y \geqslant 0, \quad \Phi y \geqslant b \}, \quad C^* = \{ q \in E \mid q \geqslant 0, \quad \Phi' q \leqslant a \}.$$

Constater que C et C* sont convexes.

On cherche x, p tels que :

(5) $\quad x \in C, \quad (a \mid x) \leqslant (a \mid y) \quad \forall y \in C,$

(6) $\quad p \in C^*, \quad (p \mid b) \geqslant (q \mid b) \quad \forall q \in C^*.$

a. Vérifier que $(a \mid x) \geqslant (b \mid p) \quad \forall x \in C, \quad p \in C^*$; que peut-on dire de x et p si l'égalité a lieu ?

b. Montrer que si $C^* = \varnothing$, le problème (5) est sans solution, soit que $C = \varnothing$, soit que $y \longmapsto (a \mid y)$ n'est pas bornée inférieurement sur C. On a la même conclusion pour (6) lorsque $C = \varnothing$.

c. On suppose C et C* non vides. Établir que la fonction $y \longmapsto (a \mid y)$ est bornée inférieurement sur C. Pourquoi le I-3° *a.* ne permet-il pas de conclure, en général, à l'existence d'une solution pour (5) ?

On pose $\gamma = \inf_{y \in C} (a \mid y)$. Montrer, en utilisant 2° *c.* et *d.*, qu'il existe $x \in C$ tel que $(a \mid x) \leqslant \gamma$; en déduire que (5) possède une solution x. De la même manière, (6) possède une solution p.

Montrer l'égalité $(b \mid p) = (a \mid x)$.

4° On reprend le problème du 3°, avec les mêmes notations, dans la situation particulière suivante. E est de dimension 2; $\{ e_1, e_2 \}$ est une base orthonormée de E; $K = \{ \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 \mid \xi_1, \xi_2 \geqslant 0 \}$; Φ est la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$. On choisit $b = e_2 - e_1$. Le vecteur a peut varier dans E.

Caractériser C, puis C* en fonction de a; résoudre les problèmes (5) et (6) selon les valeurs de a.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail